

**ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A**  
**PROVA SCRITTA DEL 02/07/13**

- (1) Sia  $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , tale che  $f_0 \geq 0$  q.o. e  $\int_{\mathbb{R}^n} f_0 = a < 1$ . Si definisce per ricorrenza la successione di funzioni  $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo:

$$f_1(x) = f_0 * f_0(x), f_{k+1}(x) = f_0 * f_k(x) \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Stabilire se la successione di funzioni  $\{f_k\}$  converge in  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , e se sì a quale limite.

- (2) Sia  $\{z_k\}$  una successione di punti in  $\mathbb{R}^n$  tale che  $\lim_{k \rightarrow \infty} |z_k| = \infty$ . Sia  $g$  una funzione integrabile nonnegativa su  $\mathbb{R}^n$ , calcolare se esiste

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(x - z_k)}{1 + |x|} d\mu(x) .$$

- (3) Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura. Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni misurabili su  $X$ , tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \sinh(|f_n|) d\mu = 0 .$$

- a) Provare che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p = 0$  per ogni  $p, 1 \leq p < \infty$ .  
b) Dare un esempio di una successione  $\{f_n\}$  (verificante le ipotesi fatte) per cui  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_\infty \neq 0$ .